

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO
INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

STUDIUM STIRLINGOVA TERMODYNAMICKÉHO OBĚHU

STUDY OF STIRLING CYCLE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JAROMÍR POSPÍŠIL

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. ZDENĚK KAPLAN, CSc.

BRNO 2009

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav automobilního a dopravního inženýrství

Akademický rok: 2008/2009

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jaromír Pospíšil

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Studium Stirlingova termodynamického oběhu

v anglickém jazyce:

Study of Stirling cycle

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Obsahem práce je studium uzavřeného termodynamického oběhu s regenerací tepla.

Cíle bakalářské práce:

Cílem je vytvoření matematického modelu využitelného při praktických konstrukcích tepelných strojů založených na Stirlingově oběhu.

Seznam odborné literatury:

Organ, A. J.: The Regenerator and the Stirling Engine

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Zdeněk Kaplan, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/2009.

V Brně, dne 22.10.2008

L.S.

prof. Ing. Václav Pištěk, DrSc.
Ředitel ústavu

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

POSPÍŠIL Jaromír: Stirlingova termodynamického oběhu.

Cílem této práce je seznámení s termodynamickými ději Stirlingova cyklu a teoretická analýza podle Gustava Schmidta.

V první části je uveden princip Stirlingova cyklu a rozdíl mezi ideálním a skutečným cyklem.

V další části je představeno, krok po kroku, odvození teoretického výpočtu Stirlingova cyklu podle Gustava Schmidta.

V poslední části práce jsou graficky vykresleny závislosti poměrného výkonu Stirlingova motoru na jeho parametrech odvozených ze Schmidty teorie.

Klíčová slova: Stirlingův cyklus, Schmidtova teorie, termodynamický oběh

ABSTRACT

POSPÍŠIL Jaromír: Study of Stirling cycle.

The purpose of my thesis is to introduce the Stirling cycle as a thermodynamic cycle and introduce theoretical analysis due to Gustav Schmidt.

First part concentrates on principle of Stirling cycle and on the differences between the ideal and real cycle.

Next part introduces step by step a derivation of theoretical analysis of the operation of Stirling engines due to Gustav Schmidt

Last part graphically investigates the dependence of principal design parameters of Schmidt analysis on power parameter of Stirling engine.

Key words: Stirling cycle, Schmidt analysis, thermodynamic cycle

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

POSPÍŠIL, J. *Studium Stirlingova termodynamického oběhu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 35 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Zdeněk Kaplan, CSc.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Studium Stirlingova termodynamického oběhu* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Kaplana, CSc. a uvedl v seznamu literatury všechny použité literární a odborné zdroje.

V Brně dne 20. května 2009

vlastnoruční podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Tímto děkuji panu doc. Ing. Zdeňku Kaplanovi, CSc. za odborné vedení mé práce, za cenné připomínky a rady, kterými přispěl k vypracování této bakalářské práce.

OBSAH

1	ÚVOD	15
2	STIRLINGŮV CYKLUS	16
2.1	IDEÁLNÍ STIRLINGŮV CYKLUS.....	16
2.2	SKUTEČNÝ STIRLINGŮV CYKLUS	18
3	TEORETICKÁ ANALÝZA STIRLINGOVA CYKLU	20
3.1	TEORIE IDEÁLNÍHO CYKLU	20
3.2	SCHMIDTOVA TEORIE.....	22
3.2.1	Hlavní předpoklady.....	22
3.2.2	Vyjádření hlavních rovnic	22
3.2.3	Výpočet vykonané práce a přeneseného tepla	25
4	PARAMETRY STIRLINGOVA MOTORU.....	27
4.1	VLIV TEPLoty A TLAKU	27
4.2	OPTIMALIZACE PARAMETRŮ.....	28
5	ZÁVĚR	32
	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	33
	SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ	34

1 ÚVOD

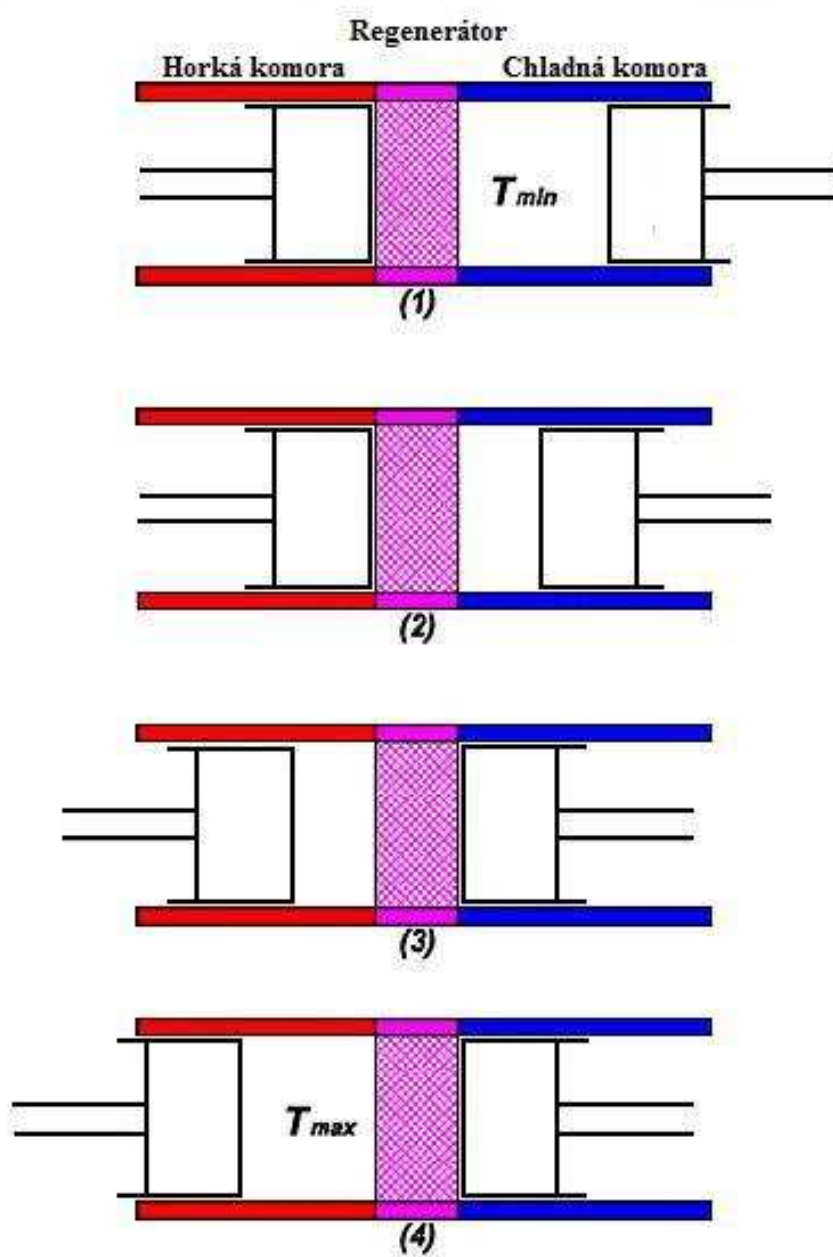
Stirlingův cyklus je uzavřený termodynamický oběh s regenerací tepla. Autorem prvního motoru pracujícího s regenerací tepla je reverend Dr. Robert Stirling, který si nechal princip regenerace v roce 1816 patentovat. Motory pracující se Stirlingovým cyklem byly používány jako bezpečnější náhrada parních strojů až do doby, kdy je nahradily motory s vnitřním spalováním. V dnešní době jsou stroje pracující se Stirlingovým cyklem využívány především ke kogeneraci energie. Hlavní výhodou oproti strojům založeným na obězích s vnitřním spalováním je možnost využití jakékoliv formy tepelné energie. Pro spalování lze využít jakékoliv palivo. Navíc je palivo spalováno kontinuálně, což je díky dokonalejšímu spalování šetrnější k životnímu prostředí. Jako energie se dá využít také energie slunečního záření.

Cílem této práce je seznámení s termodynamickými ději a teoretická analýza podle Gustava Schmidta. Hlavním zdrojem informací pro moji práci je publikace od Grahama Walkera: *Stirling cycle machines*. V této knize jsou uvedeny hlavní myšlenky teorie Stirlingova termodynamického cyklu, které v této práci uvedu. Mým cílem je, aby po přečtení této práce čtenář věděl, jakým způsobem Stirlingův cyklus pracuje a měl základní představu o idealizovaném návrhu hlavních parametrů Stirlingova motoru.

2 STIRLINGŮV CYKLUS

2.1 IDEÁLNÍ STIRLINGŮV CYKLUS

Pro ilustraci ideálního Stirlingova cyklu si představme válec se dvěma písty orientovanými proti sobě a regenerátorem mezi nimi (obr. 1) [4]. Regenerátor můžeme chápat jako termodynamickou houbu, která střídavě uvolňuje a pohlcuje teplo. Prostor mezi jedním pístem a regenerátorem označme chladnou komorou, druhý prostor jako horkou komoru. Teplota chladné komory je udržována na nízké teplotě T_{min} , teplota horké komory na vysoké teplotě T_{max} . Uvažujeme, že písty se pohybují bez tření a nedochází k úniku média.



Obr. 1 Polohy pístů v krajních bodech dějů [3]

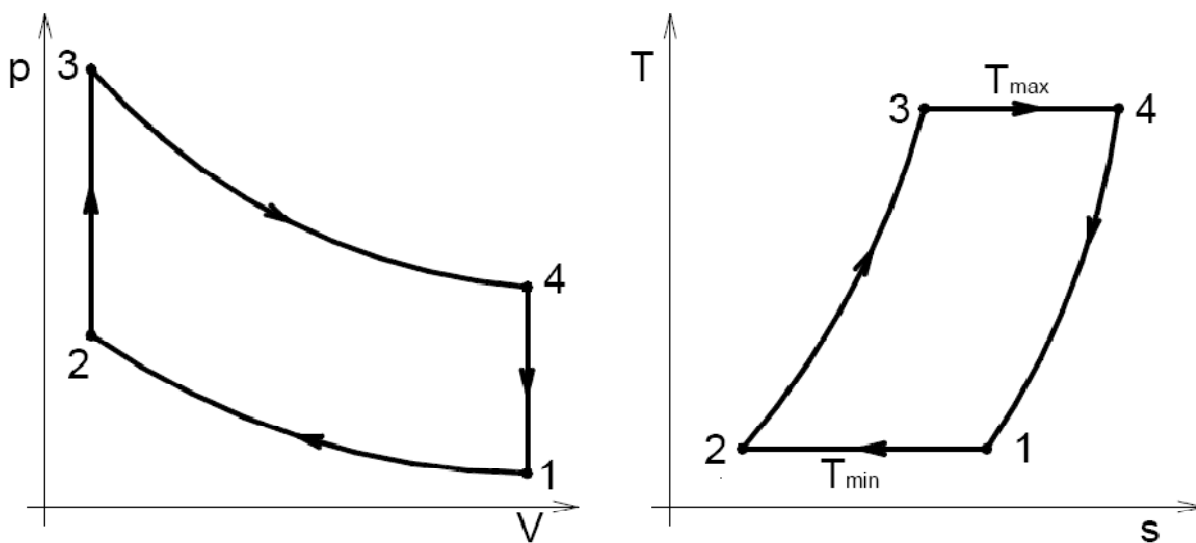
Oběh začíná v bodě 1. Píst chladné komory je ve vnější krajní poloze a píst horké komory ve vnitřní krajní poloze. Veškeré pracovní médium je v chladném prostoru a má maximální objem a minimální teplotu. Tlak je tedy minimální.

Mezi body 1 a 2 probíhá izotermická komprese. Pohybuje se pouze píst chladné komory a to směrem k vnitřní krajní poloze. Roste tlak a teplota je odváděním tepla Q_{out} udržována konstantní. Práce potřebná na stlačení média je odpovídající odvedenému teplu.

V bodě 2 je dosaženo minimálního objemu. Mezi body 2 a 3 (izochorický ohřev) se oba písty pohybují stejně rychle stejným směrem (píst chladné komory do vnitřní krajní polohy, píst horké komory směrem k vnější krajní poloze). Objem pracovní látky zůstává konstantní. Během průchodu regenerátorem je médium ohříváno na maximální teplotu. Regenerátor odevzdá médiu teplo Q_{R1} . Tlak roste až do bodu 3, kde je jeho hodnota maximální.

Mezi body 3 a 4 (izotermická expanze) se pohybuje píst horkého prostoru do vnější krajní polohy, píst chladné komory zůstává ve vnitřní krajní poloze. Během expanze se zvětšuje objem a klesá tlak. Teplota je přiváděním tepla Q_{in} udržována na konstantní teplotě T_{max} . Práce vykonaná pístem při expanzi je rovna teplu přivedenému médiu.

Cyklus uzavírá děj mezi body 4 a 1 (izochorické ochlazení). Během tohoto děje se oba písty pohybují současně a médium je za konstantního objemu přesouváno z horkého do chladného prostoru. Během přechodu přes regenerátor médium odevzdá regenerátoru teplo Q_{R2} a teplota média klesá na teplotu T_{min} . Tlak také klesá na jeho minimální hodnotu.



Obr. 2 p - V a T - S diagram ideálního Stirlingova cyklu [4]

Jestliže teplo přenesené v ději 2 – 3 má stejnou velikost jako teplo přenesené v ději 4 - 1, tzn. $Q_{R1} = Q_{R2}$, pak jediné tepelné výměny mezi motorem a okolím jsou při udržování teploty T_{max} a T_{min} . Teplo je tedy pouze dodáváno při izotermické expanzi a uvolňováno při izotermické kompresi, což je stejné jako u Carnotova cyklu a účinnost η lze vyjádřit vztahem

$$\eta = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}$$

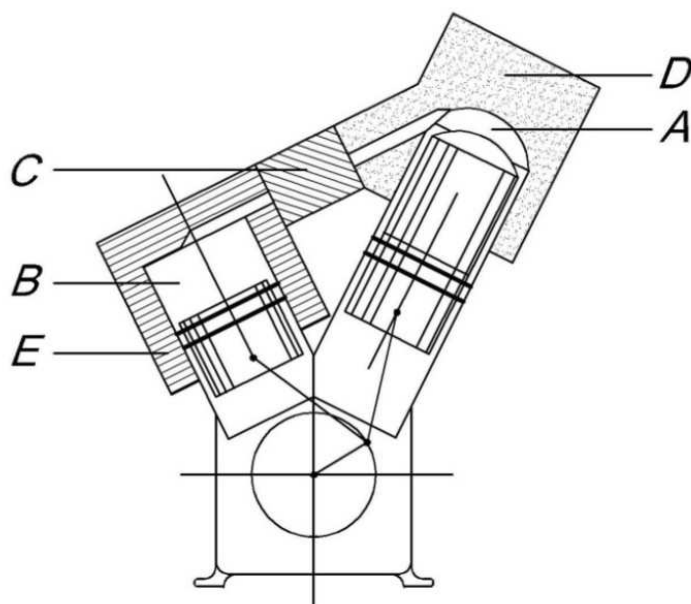
Tato účinnost je nejvyšší, které lze u tepelných strojů dosáhnout.

Ideální Stirlingův cyklus je tedy tvořen dvěma izochorickými a dvěma izotermickými, termodynamicky vratnými ději. Při izotermickém ději uvažujeme nekonečně rychlý přestup

tepla mezi stěnou válce a pracovním médiem. Dalším předpokladem je, že během expanze a komprese bylo veškeré médium v horkém, případně chladném prostoru, tudíž zanedbáváme například vliv prázdných prostor v regenerátoru. Dále bylo zanedbáno veškeré aerodynamické a mechanické tření. Regenerátor jsme považovali za dokonalý, to znamená, že jsme uvažovali nekonečnou rychlost výměny tepla v regenerátoru a nekonečnou tepelnou kapacitu regenerátoru.

2.2 SKUTEČNÝ STIRLINGŮV CYKLUS

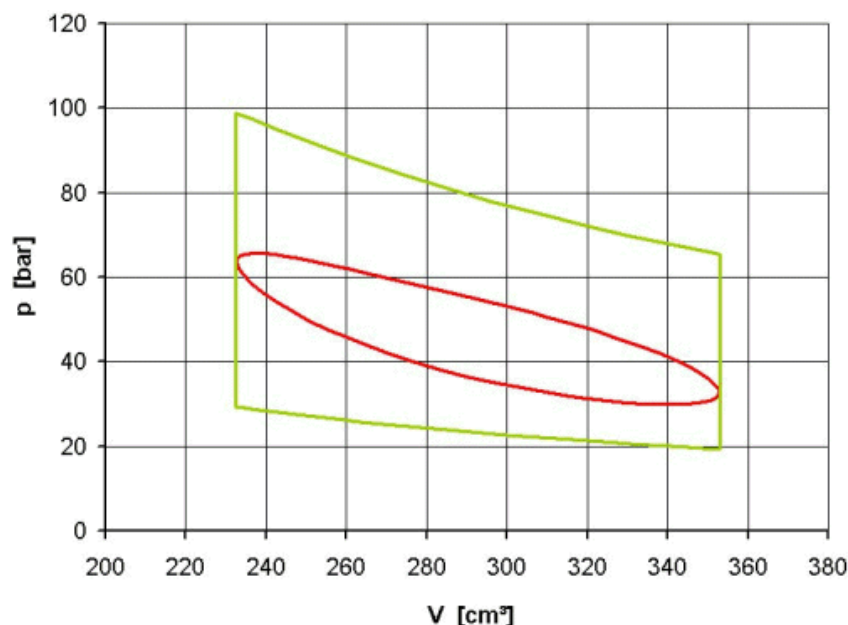
Pro ilustraci ideálního cyklu byly použity dva protilehlé písty s regenerátorem mezi nimi. Schéma skutečného stroje je na obr. 3 [4]. Toto uspořádání představuje jednu z mnoha modifikací, konkrétně se jedná o modifikaci α . Stroj se skládá ze dvou válců spojených kanálkem, které obsahují písty na společném klikovém hřídeli a tepelné výměníky. Regenerátor odděluje chladný a horký prostor.



Obr. 3 Schéma skutečného stroje A- horký prostor, B-chladný prostor, C-regenerátor, D-ohřívač, E-chladič [4]

Hlavní odlišností od ideálního cyklu je průběh změn objemů. Příčinou této odlišnosti je pohyb pístů. U ideálního cyklu se písty pohybují nespojitě a tím je dosaženo i nespojitého průběhu změn objemů. U reálného stroje je při použití klikového mechanismu pohyb pístů spojitý, blízký sinusoidě. To má za následek hladký průběh v p-V diagramu (Obr. 4), kde není jednoznačně viditelná hranice mezi jednotlivými ději.

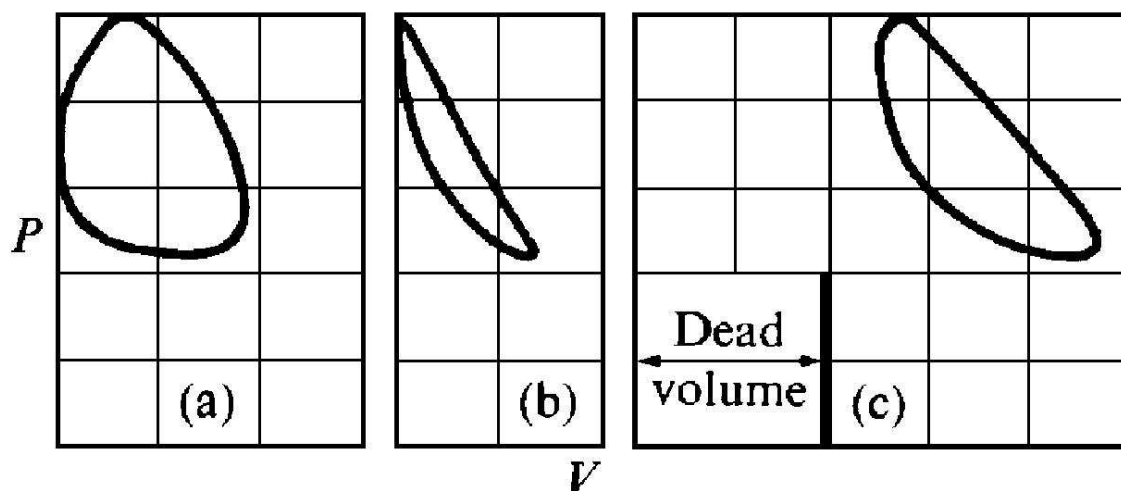
Další odchýlení od ideálního cyklu je zapříčiněno tím, že komprese a expanze není izotermická. Tyto děje v motoru běžícím otáčkami okolo 1000 min^{-1} se blíží spíše adiabatickému ději, tedy ději bez výměny tepla. Ke zlepšení tepelné výměny se používá ohřívač na horkém válci a chladič na chladném válci. V těchto výměnících ovšem dochází k dalším ztrátám, ať už to jsou ztráty prouděním, nebo ztráty z dalšího navýšení celkového objemu. Kromě toho dochází k ohřívání pracovní látky nejen při přechodu z regenerátoru do horkého prostoru, ale také při přechodu z horkého prostoru do regenerátoru. Stejně tak chlazení média probíhá při přechodu do chladného prostoru a z chladného prostoru. To má za následek snížení regenerační schopnosti motoru.



Obr. 4 Porovnání p-V diagramu ideálního a skutečného cyklu[1]

Pro správné vyjádření termodynamiky je potřeba vykreslit 3 p-V diagramy, protože expanze ani komprese neprobíhá výhradně jen v jednom prostoru. Proto se vykresluje jeden p-V diagram pro horký prostor (Obr. 5 a), jeden pro chladný prostor (Obr. 5 b) a jeden pro celkový objem (Obr. 5 c), který obsahuje také takzvaný mrtvý prostor. To je část pracovního prostoru, která není zdvihovým prostorem ani pro jeden píst a zahrnuje i objem regenerátoru a jiných tepelných výměníků a objem vnitřních vedení. Tento objem má vliv zejména na snížení kompresního poměru.

Diagram pro horký prostor představuje součet vykonané práce, naproti tomu diagram pro chladný prostor představuje práci spotřebovanou během cyklu. Rozdíl ploch těchto diagramů reprezentuje práci, která je po odečtení ztrát využitelná na výstupu z motoru.



Obr. 5 p-V diagram a) horkého prostoru b) chladného prostoru c) celkového prostoru [4]

3 TEORETICKÁ ANALÝZA STIRLINGOVA CYKLU

Tato kapitola pojednává o termodynamickém výpočtu Stirlingova cyklu. Je rozdělena do dvou hlavních částí a to výpočet pro ideální cyklus a výpočet podle Gustava Schmidta.

3.1 TEORIE IDEÁLNÍHO CYKLU

Při výpočtu termodynamiky ideálního cyklu využijeme rovnice pro ideální plyny a jejich ideálních změn. Předpokládáme nespojitý pohyb pístů a tedy i nespojitou změnu objemů.

Pro výpočet potřebujeme znát výchozí stav média, tzn. teplotu a objem, nebo tlak ve výchozím bodě oběhu, minimální objem a teploty, při kterých bude stroj pracovat.

Z výchozího stavu média spočítáme hmotnost média:

$$m = \frac{p_{\min} \cdot V_{\max}}{R \cdot T_{\min}} \quad (1)$$

Pro objemy a teploty v jednotlivých bodech platí:

$$\begin{array}{llll} V_1 = V_{\max} & V_2 = V_{\min} & V_3 = V_{\min} & V_4 = V_{\max} \\ T_1 = T_{\min} & T_2 = T_{\min} & T_3 = T_{\max} & T_4 = T_{\max} \end{array}$$

Pro jednotlivé děje platí tyto rovnice:

Izotermická komprese (bod 1-2)

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad (2) \quad Q_{\text{out}} = m \cdot R \cdot T_{\min} \cdot \ln \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right) \quad (3)$$

Izochorický ohřev (bod 2-3)

$$\frac{p_2}{T_{\min}} = \frac{p_3}{T_{\max}} \quad (4) \quad Q_{R1} = m \cdot c_v \cdot (T_{\max} - T_{\min}) \quad (5)$$

Izotermická expanze (bod 3-4)

$$p_4 \cdot V_4 = p_3 \cdot V_3 \quad (6) \quad Q_{\text{in}} = m \cdot R \cdot T_{\max} \cdot \ln \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right) \quad (7)$$

Izochorické ochlazení (bod 4-1)

$$\frac{p_4}{T_{\max}} = \frac{p_1}{T_{\min}} \quad (8) \quad Q_{R2} = m \cdot c_v \cdot (T_{\min} - T_{\max}) \quad (9)$$

Vykonaná práce se rovná celkovému teplu dodanému do soustavy:

$$Q_c = Q_{\text{out}} + Q_{R1} + Q_{\text{in}} + Q_{R2} \quad (10)$$

$$Q_c = m \cdot R \cdot T_{\min} \cdot \ln \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right) + m \cdot c_v \cdot (T_{\max} - T_{\min}) + m \cdot R \cdot T_{\max} \cdot \ln \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right) + m \cdot c_v \cdot (T_{\min} - T_{\max}) \quad (11)$$

$$Q_c = m \cdot R \cdot T_{\min} \cdot \ln \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right) + m \cdot R \cdot T_{\max} \cdot \ln \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right) = m \cdot R \cdot T_{\max} \cdot \ln \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right) - m \cdot R \cdot T_{\min} \cdot \ln \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right) \quad (12)$$

$$Q_c = m \cdot R \cdot \ln\left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}}\right) (T_{\max} - T_{\min}) \quad (13)$$

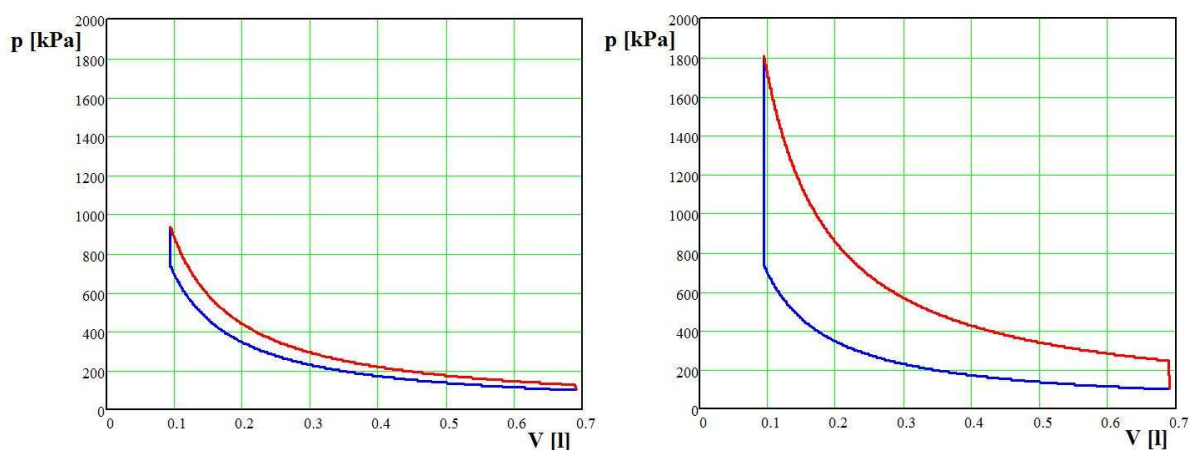
Účinnost cyklu je dána jako poměr vykonané práce ku teplu, které bylo přivedeno:

$$\eta = \frac{Q_c}{Q_{\text{in}}} = \frac{m \cdot R \cdot \ln\left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}}\right) (T_{\max} - T_{\min})}{m \cdot R \cdot T_{\max} \cdot \ln\left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}}\right)} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \quad (14)$$

Výkon se vypočítá jako součin celkového tepla a otáček, při kterých motor pracuje:

$$P = n \cdot Q_c \quad (15)$$

Práce jednoho cyklu je stejná jako teplo Q_c , které lze ilustrovat jako obsah plochy ohraničený křivkou v p-V diagramu. Na obr. 6 je vidět rozdíl vykonané práce během jednoho cyklu pro dvě různé teploty.



Obr. 6 p-V diagram ideálního cyklu pro a) $T_{\max}=100^{\circ}\text{C}$ b) $T_{\max}=450^{\circ}\text{C}$

Tento výpočet pro velice idealizovaný stroj je použitelný pouze pro jednoduchý předběžný výpočet.

3.2 SCHMIDTOVA TEORIE

V roce 1871 publikoval Gustav Schmidt svoji analýzu Stirlingova cyklu [2]. Tuto analýzu nyní bod po bodu projdu dle Walkera [4]. Navíc zde uvedu i postup odvození. Hlavní odlišností od analýzy ideálního cyklu je, že se již zabýváme spojitým pohybem pístů a tudíž i spojitým průběhem objemu.

3.2.1 Hlavní předpoklady

- Proces regenerace je dokonalý.
- Okamžitý tlak je stejný v celém objemu.
- Pracovní médium se řídí rovnicemi ideálního plynu.
- Nedochází k žádnému úniku média a celková hmotnost média zůstává stejná.
- Průběh objemu v pracovním prostoru odpovídá sinusoidě.
- Teplota tepelného výměníku je ve všech místech stejná.
- Teplota pístů a stěn válců je konstantní.
- Dochází k dokonalému mísení obsahu válců.

3.2.2 Vyjádření hlavních rovnic

Pro zjednodušení zavedeme poměr teplot a objemů:

$$\tau = \frac{T_c}{T_e} \quad (16) \quad \kappa = \frac{V_c}{V_e} \quad (17) \quad \chi = \frac{V_d}{V_e} \quad (18)$$

Průběh objemů lze popsat rovnicemi:

$$V_e = \frac{1}{2} V_E (1 + \cos(\alpha)) \quad (19)$$

$$V_c = \frac{1}{2} V_C (1 + \cos(\alpha - \phi)) = \frac{1}{2} \kappa V_E (1 + \cos(\alpha - \phi)) \quad (20)$$

$$V_d = \chi V_E \quad (21)$$

Hmotnost pracovního média v jednotlivých prostorech je ze stavové rovnice ideálního plynu definována vztahy:

$$M_e = \frac{p_e V_e}{R T_e} \quad (22) \quad M_c = \frac{p_c V_c}{R T_c} \quad (23) \quad M_d = \frac{p_d V_d}{R T_d} \quad (24)$$

Celkovou hmotnost dostaneme součtem hmotností ve všech jednotlivých prostorech:

$$M_m = M_e + M_c + M_d = \frac{p_e V_e}{R T_e} + \frac{p_c V_c}{R T_c} + \frac{p_d V_d}{R T_d} \quad (25)$$

Po dosazení jednotlivých objemů (16) – (18) do rovnice (25) a předpokladu stejných tlaků

$p = p_e = p_c = p_d$ dostaneme:

$$M_m = \frac{p \cdot \left[\frac{1}{2} V_E (1 + \cos(\alpha)) \right]}{R T_e} + \frac{p \cdot \left[\frac{1}{2} \kappa V_E (1 + \cos(\alpha - \phi)) \right]}{R T_c} + \frac{p \cdot (\chi V_E)}{R T_d} \quad (26)$$

Teplotu mrtvého prostoru si vyjádříme jako průměrnou teplotu mezi maximální a minimální teplotou, rovnici (26) upravíme a rozšíříme zlomkem T_c/T_c a zjednodušíme:

$$T_d = T_c + \frac{1}{2} \cdot (T_e - T_c) = T_c - \frac{T_c}{2} + \frac{T_e}{2} = \frac{T_c}{2} + \frac{T_e}{2} \cdot \frac{T_c}{T_c} = \frac{T_c}{2} \cdot \left(1 + \frac{T_e}{T_c}\right) = \frac{T_c}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \quad (27)$$

$$M_m = \frac{P \cdot V_E}{2 \cdot R} \cdot \left[\frac{1 + \cos(\alpha)}{T_e} + \frac{\kappa \cdot (1 + \cos(\alpha - \phi))}{T_c} + \frac{2 \cdot \chi}{T_d} \right] \cdot \frac{T_c}{T_c} \quad (28)$$

$$M_m = \frac{P \cdot V_E}{2 \cdot R \cdot T_c} \cdot \left[\frac{T_c}{T_e} \cdot (1 + \cos(\alpha)) + \kappa \cdot (1 + \cos(\alpha - \phi)) + \frac{2 \cdot \chi \cdot T_c}{\frac{T_c}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)} \right] \quad (29)$$

$$M_m = \frac{P \cdot V_E}{2 \cdot R \cdot T_c} \cdot \left[\tau \cdot (1 + \cos(\alpha)) + \kappa \cdot (1 + \cos(\alpha - \phi)) + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} \right] \quad (30)$$

Dále je potřeba upravit výraz v závorce z rovnice (30):

$$\tau \cdot (1 + \cos(\alpha)) + \kappa \cdot (1 + \cos(\alpha - \phi)) + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} = (\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)) \cdot \cos(\alpha) + \kappa \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\alpha) + \tau + \kappa + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} \quad (31)$$

Pro další úpravu si zavedeme substituci:

$$(\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)) \cdot \cos(\alpha) + \kappa \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\alpha) = A \cdot \cos(\alpha - \theta) = A \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\alpha) + A \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\alpha) \quad (32)$$

$$(\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)) \cdot \cos(\alpha) + \tau + \kappa + \kappa \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\alpha) + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} = A \cdot \cos(\alpha - \theta) + \tau + \kappa + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} \quad (33)$$

Pro tuto substituci musíme vyjádřit čemu se rovná A a θ . Z rovnosti levé a pravé strany rovnice (32) plyne:

$$(\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)) = A \cdot \cos(\theta) \quad (34) \quad \kappa \cdot \sin(\phi) = A \cdot \sin(\theta) \quad (35)$$

$$A = \frac{\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)}{\cos(\theta)} \quad (36) \quad A = \frac{\kappa \cdot \sin(\phi)}{\sin(\theta)} \quad (37)$$

$$\frac{\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)}{\cos(\theta)} = \frac{\kappa \cdot \sin(\phi)}{\sin(\theta)} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\kappa \cdot \sin(\phi)}{\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)} \quad (38)$$

$$A = \frac{\kappa \cdot \sin(\phi)}{\sin(\theta)} = \frac{\kappa \cdot \sin(\phi)}{\sin\left(\arctan\left(\frac{\kappa \cdot \sin(\phi)}{\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)}\right)\right)} = \frac{\sqrt{\tau^2 + 2 \cdot \cos(\phi) \cdot \tau \cdot \kappa + \kappa^2}}{(\tau + \kappa \cdot \cos(\phi))^2} \cdot (\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)) = \sqrt{\tau^2 + 2 \cdot \cos(\phi) \cdot \tau \cdot \kappa + \kappa^2} \quad (39)$$

Výsledná úprava výrazu (31):

$$\tau \cdot (1 + \cos(\alpha)) + \kappa \cdot (1 + \cos(\alpha - \phi)) + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} = \sqrt{\tau^2 + 2 \cdot \cos(\phi) \cdot \tau \cdot \kappa + \kappa^2} \cdot \cos(\alpha - \theta) + \tau + \kappa + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} \quad (40)$$

Výsledek dosadíme zpět do rovnice pro celkovou hmotnost média (30):

$$M_m = \frac{p \cdot V_E}{2 \cdot R \cdot T_c} \cdot \left(\sqrt{\tau^2 + 2 \cdot \cos(\phi) \cdot \tau \cdot \kappa + \kappa^2} \cdot \cos(\alpha - \theta) + \tau + \kappa + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} \right) \quad (41)$$

Z rovnice (41) vyjádříme tlak a nahradíme dané výrazy dle naznačené substituce (43) a (44):

$$p = \frac{2 \cdot M_m \cdot R \cdot T_c}{V_E \left(\tau + \kappa + \cos(\alpha - \theta) \cdot \sqrt{\tau^2 + 2 \cdot \cos(\phi) \cdot \tau \cdot \kappa + \kappa^2} + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} \right)} \quad (42)$$

$$A = \sqrt{\tau^2 + 2 \cdot \cos(\phi) \cdot \tau \cdot \kappa + \kappa^2} \quad (43) \quad B = \tau + \kappa + \frac{4 \cdot \chi \cdot \tau}{\tau + 1} \quad (44)$$

$$p = \frac{2 \cdot M_m \cdot R \cdot T_c}{V_E} \cdot \frac{1}{(B + A \cdot \cos(\theta - \alpha))} \quad (45)$$

Jelikož kosinus nabývá hodnot od -1 do 1, lze vyjádřit maximální a minimální tlak:

$$p_{\max} = \frac{2 \cdot M_m \cdot R \cdot T_c}{V_E (B - A)} \quad (46) \quad p_{\min} = \frac{2 \cdot M_m \cdot R \cdot T_c}{V_E (B + A)} \quad (47)$$

Po úpravě:

$$\frac{2 \cdot M_m \cdot R \cdot T_c}{V_E} = p_{\max} (B - A) = p_{\min} (B + A) \quad (48)$$

Dosazením (48) do rovnice (45) a vytknutí B dostaneme:

$$p = \frac{p_{\max} \cdot B \cdot \left(1 - \frac{A}{B}\right)}{B \cdot \left(1 + \frac{A}{B} \cdot \cos(\alpha - \theta)\right)} = \frac{p_{\min} \cdot B \cdot \left(1 + \frac{A}{B}\right)}{B \cdot \left(1 + \frac{A}{B} \cdot \cos(\alpha - \theta)\right)} \quad (49)$$

V rovnici (49) zavedeme substituci: $\frac{A}{B} = \delta$

$$p = \frac{p_{\max} \cdot (1 - \delta)}{1 + \delta \cdot \cos(\alpha - \theta)} = \frac{p_{\min} \cdot (1 + \delta)}{1 + \delta \cdot \cos(\alpha - \theta)} \quad (50)$$

Pro střední hodnotu tlaku potom platí:

$$p_{\text{mean}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \frac{p_{\max} \cdot (1 - \delta)}{1 + \delta \cdot \cos(\alpha - \theta)} d(\alpha) \quad (51)$$

$$p_{\text{mean}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot p_{\max} \cdot (1 - \delta) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{1 - \delta^2}} = p_{\max} \sqrt{\frac{1 - \delta}{1 + \delta}} \quad (52)$$

Výsledek tlaku jsme dostali pomocí tabulkového integrálu:

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \frac{1}{X + Y \cdot \cos(x + \beta)} dx = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{X^2 - Y^2}} \quad (53)$$

3.2.3 Výpočet vykonané práce a přeneseného tepla

Jelikož uvažujeme expanzi i kompresi jako izotermický děj, je práce rovna přenesenému teple:

$$Q = P = \int p \, dV \quad (54)$$

Tlak získáme dosazením rovnice (52) do (50) a okamžité objemy (19) a (20) derivujeme podle α :

$$p = \frac{p_{\max}(1-\delta)}{1+\delta \cdot \cos(\alpha-\theta)} = \frac{\frac{p_{\text{mean}}}{\sqrt{1-\delta}} \cdot (1-\delta)}{1+\delta \cdot \cos(\alpha-\theta)} = p_{\text{mean}} \cdot \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{1+\delta \cdot \cos(\alpha-\theta)} \quad (55)$$

$$dV_e = -\frac{1}{2} \cdot V_E \cdot \sin(\alpha) \cdot d\alpha \quad (56) \quad dV_c = -\frac{1}{2} \cdot V_E \cdot \kappa \cdot \sin(\alpha-\phi) \cdot d\alpha \quad (57)$$

Dostaneme tedy dva integrály, jeden pro horký prostor a teplo dodané a jeden pro chladný prostor a teplo odebrané ze systému:

$$Q_{\text{in}} = \int_0^{2\pi} p_{\text{mean}} \cdot \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{1+\delta \cdot \cos(\alpha-\theta)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot V_E \cdot \sin(\alpha) \right) d\alpha = -\frac{1}{2} \cdot p_{\text{mean}} \cdot \sqrt{1-\delta^2} \cdot V_E \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\alpha)}{(1+\delta \cdot \cos(\alpha-\theta))} d\alpha \quad (58)$$

$$Q_{\text{out}} = \int_0^{2\pi} p_{\text{mean}} \cdot \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{1+\delta \cdot \cos(\alpha-\theta)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot V_E \cdot \kappa \cdot \sin(\alpha-\phi) \right) d\alpha = -\frac{1}{2} \cdot p_{\text{mean}} \cdot \sqrt{1-\delta^2} \cdot V_E \cdot \kappa \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\alpha-\phi)}{(1+\delta \cdot \cos(\alpha-\theta))} d\alpha \quad (59)$$

Integrály v rovnicích (58) a (59) vypočítáme pomocí tabulkového integrálu:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x+\gamma)}{X+Y \cdot \cos(x+\beta)} dx = \frac{2\pi}{Y} \cdot \left(\frac{X}{\sqrt{X^2-Y^2}} - 1 \right) \cdot \sin(\beta-\gamma) \quad (60)$$

Po úpravě dostáváme:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\alpha)}{(1+\delta \cdot \cos(\alpha-\theta))} d\alpha = 2\pi \cdot \left[\frac{-\delta}{\sqrt{1-\delta^2} \cdot (1+\sqrt{1-\delta^2})} \right] \cdot \sin(\theta) \quad (61)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\alpha-\phi)}{(1+\delta \cdot \cos(\alpha-\theta))} d\alpha = 2\pi \cdot \left[\frac{-\delta}{\sqrt{1-\delta^2} \cdot (1+\sqrt{1-\delta^2})} \right] \cdot \sin(\theta-\phi) \quad (62)$$

Integrály (61) a (62) dosadíme do rovnic (58) a (59) a upravíme:

$$Q_{in} = -\frac{1}{2} \cdot p_{mean} \cdot \sqrt{1 - \delta^2} \cdot V_E \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{-\delta}{\sqrt{1 - \delta^2} \cdot (1 + \sqrt{1 - \delta^2})} \right] \cdot \sin(\theta) = \frac{\pi \cdot V_E \cdot \delta \cdot p_{mean} \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{1 - \delta^2} + 1} \quad (63)$$

$$Q_{out} = -\frac{1}{2} \cdot p_{mean} \cdot \sqrt{1 - \delta^2} \cdot V_E \cdot \kappa \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{-\delta}{\sqrt{1 - \delta^2} \cdot (1 + \sqrt{1 - \delta^2})} \right] \cdot \sin(\theta - \phi) = \frac{\pi \cdot V_E \cdot \delta \cdot \kappa \cdot p_{mean} \cdot \sin(\theta - \phi)}{\sqrt{1 - \delta^2} + 1} \quad (64)$$

Celkové teplo Q_c dostaneme součtem přijatého tepla (63) a odevzdaného tepla (64):

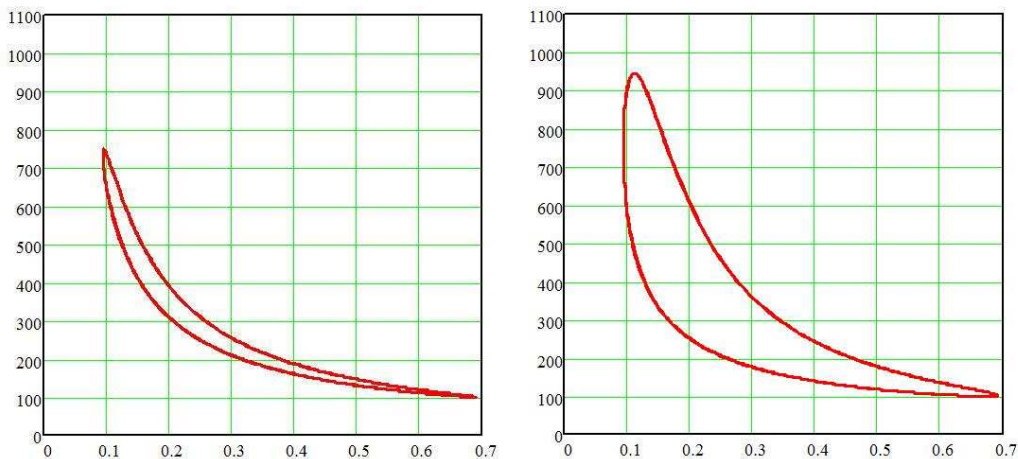
$$Q_c = Q_{in} + Q_{out} = Q_{in} \cdot \left(1 + \frac{Q_{out}}{Q_{in}} \right) \quad (65)$$

$$\frac{Q_{out}}{Q_{in}} = \frac{\frac{\pi \cdot V_E \cdot \delta \cdot \kappa \cdot p_{mean} \cdot \sin(\theta - \phi)}{\sqrt{1 - \delta^2} + 1}}{\frac{\pi \cdot V_E \cdot \delta \cdot p_{mean} \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{1 - \delta^2} + 1}} = \frac{\kappa \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) - \cos(\theta) \cdot \sin(\phi))}{\sin(\theta)} = \kappa \cdot \left(\cos(\phi) - \frac{\sin(\phi)}{\frac{\kappa \cdot \sin(\phi)}{\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)}} \right) = -\tau \quad (66)$$

$$Q_c = Q_{in} (1 - \tau) \quad (67)$$

$$P = n \cdot Q_c \quad (68)$$

Stejně jako u ideálního cyklu, teplo Q_c představuje práci vykonanou během jednoho cyklu. Na obr. 7 je vidět rozdíl vykonané práce během jednoho cyklu pro dvě různé teploty.



Obr. 7 p-V diagram Schmidtova cyklu pro a) $T_{max}=100^\circ\text{C}$ b) $T_{max}=450^\circ\text{C}$

4 PARAMETRY STIRLINGOVA MOTORU

Hlavní parametry Stirlingova motoru jsou:

Tepelný koeficient $\tau = \frac{T_c}{T_e}$

Poměr zdvihových objemů $\kappa = \frac{V_C}{V_E}$

Poměr mrtvého a horkého prostoru $\chi = \frac{V_D}{V_E}$

Fázový posun mezi objemy v jednotlivých prostorech ϕ

Tlak pracovního média

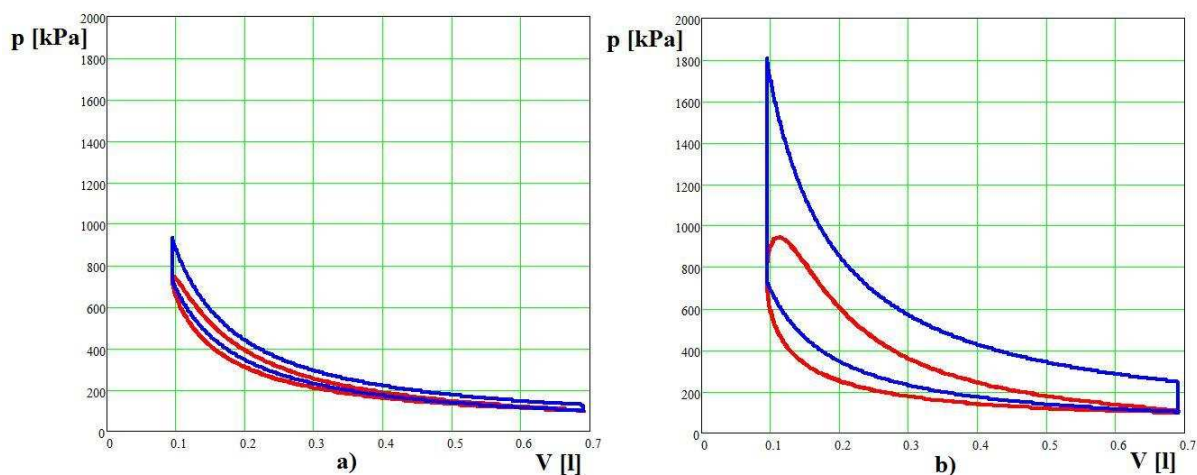
Vrtání a zdvih horkého prostoru

4.1 VLIV TEPLoty A TLAKU

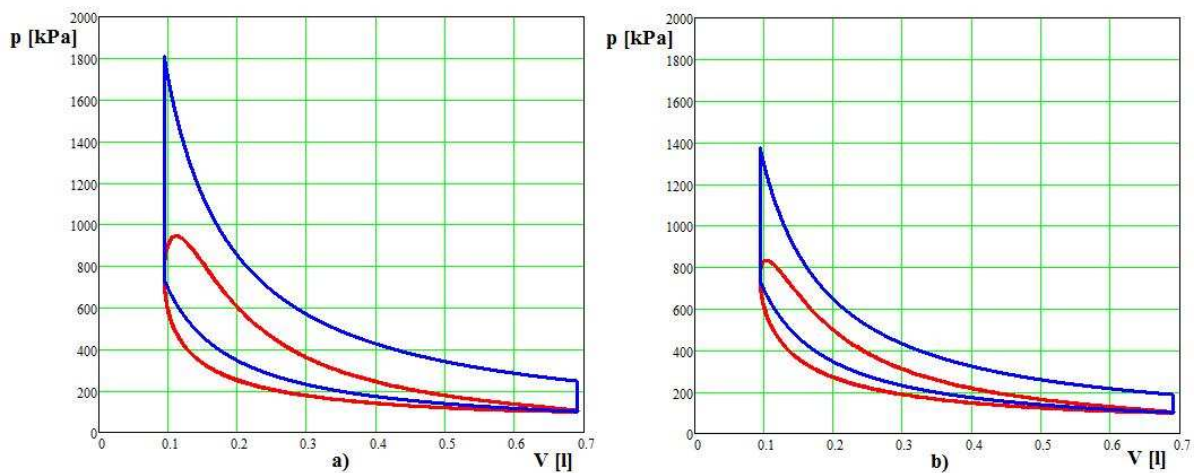
Na následujících grafech (obr. 8-10) je ukázán vliv teploty a tlaku na výkon motoru. Modře je znázorněn p-V diagram ideálního cyklu a červeně cyklu počítaného podle Schmidta.

Na obr. 8 je vidět, že s rostoucím rozdílem teplot roste výkon motoru. Pokud necháme i stejnou minimální teplotu, při které motor pracuje, zvyšuje se i účinnost. Naopak, na obr. 9 jsou znázorněny dva grafy se stejnou diferencí teplot, ale s jejich různě vysokou hodnotou. V tomto případě při zvyšujících se teplotách klesá výkon i účinnost.

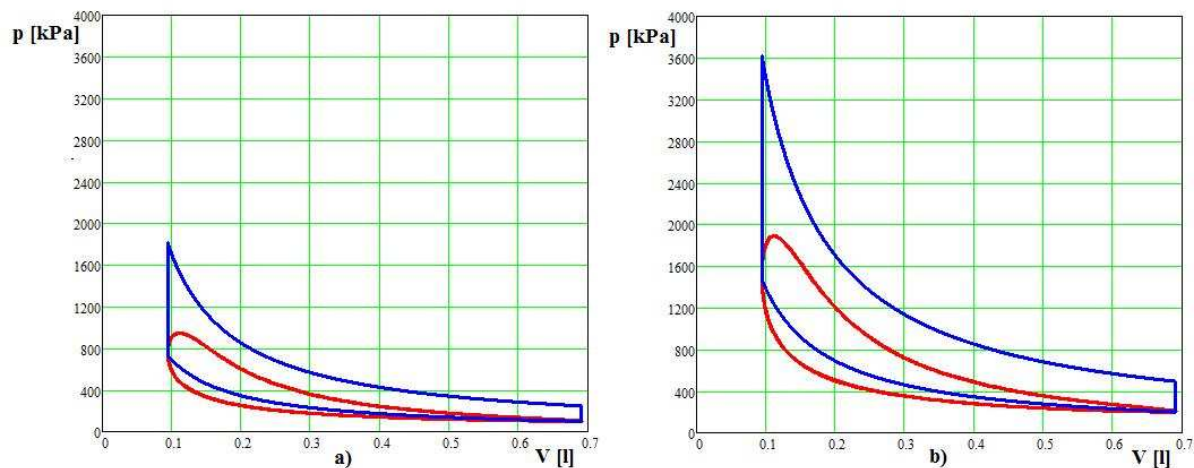
Co se týče tlaku, tak při jeho zvýšení se zvyšuje i výkon. To je ukázáno na obr. 10, kde jsou vykresleny dva p-V diagramy pro různé hodnoty zadaných minimálních tlaků.



Obr. 8 p-V diagram pro stejnou teplotu $T_{\min}=20^{\circ}\text{C}$ a různé T_{\max} a) $T_{\max}=100^{\circ}\text{C}$ b) $T_{\max}=450^{\circ}\text{C}$



Obr. 9 p-V diagram pro stejnou diferenci teplot a) $T_{\min}=20^{\circ}\text{C}$, $T_{\max}=450^{\circ}\text{C}$ b) $T_{\min}=220^{\circ}\text{C}$ $T_{\max}=650^{\circ}\text{C}$



Obr. 10 p-V diagram pro různé tlaky a) $p_{\min}=100\text{ kPa}$ b) $p_{\min}=200\text{ kPa}$

4.2 OPTIMALIZACE PARAMETRŮ

Pro porovnání vlivu různých vstupních hodnot na výkon motoru, u kterých nebudeme uvažovat vliv tlaku a zdvihového objemu, se zavádí poměrný bezrozměrný parametr přijatého tepla [4]:

$$q_{\max} = \frac{Q_{\text{in}}}{p_{\max} \cdot V_Z} = \frac{\frac{\pi \cdot V_E \cdot \delta \cdot \left(p_{\max} \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\delta}} \right) \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{1-\delta^2} + 1}}{[p_{\max} \cdot (1 + \kappa) \cdot V_E]} = \frac{\pi \cdot \delta \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta+1}}}{(\sqrt{1-\delta^2} + 1) \cdot (\kappa + 1)} \quad (69)$$

Kde V_Z je zdvihový objem:

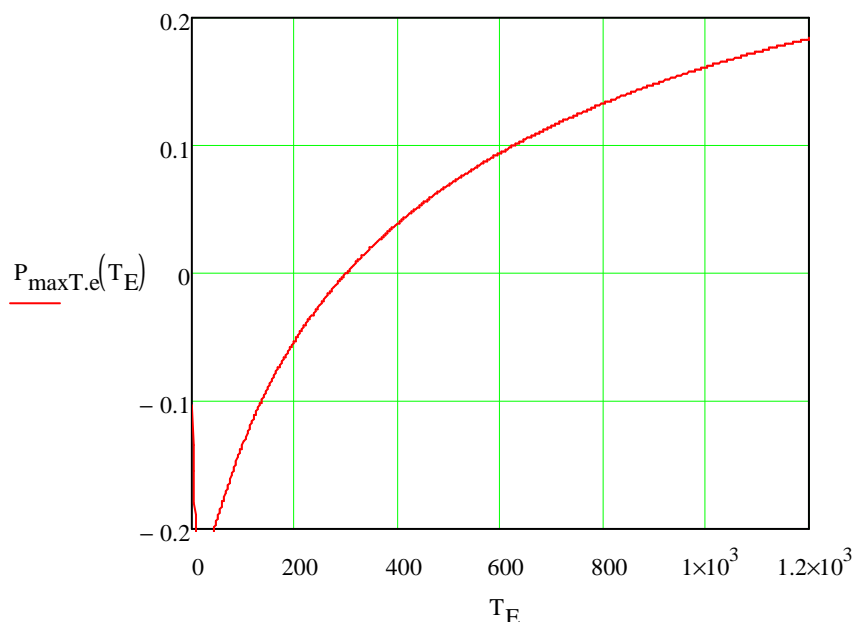
$$V_Z = V_E + V_C = (1 + \kappa) \cdot V_E \quad (70)$$

A poměrný výkon vyjádříme vztahem:

$$P_{\max} = (1 - \tau) \cdot q_{\max} \quad (71)$$

Vliv teploty horkého prostoru na výkon

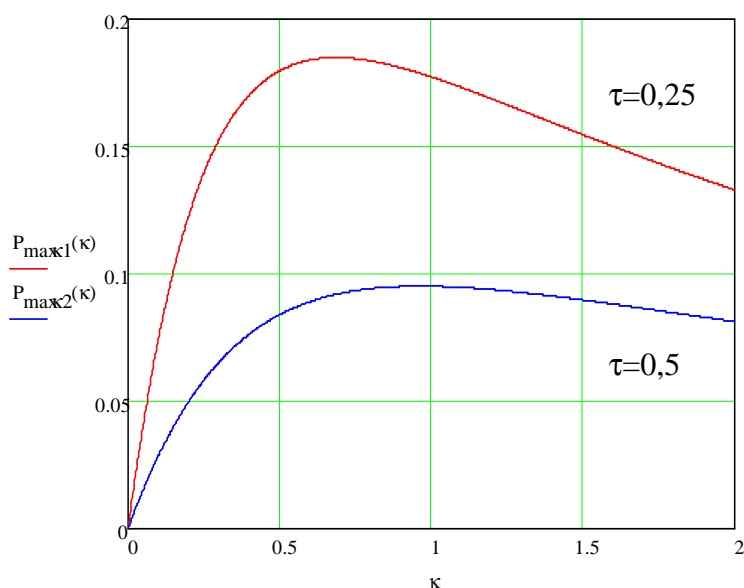
Z obr. 11 je zřejmé, že s rostoucí teplotou horkého prostoru, za jinak stejných podmínek, v tomto případě $T_C=300\text{K}$, $\kappa=0,8$, $\chi=1$, $\phi=90^\circ$, roste i výkon. Pro teploty pod 300K , tzn., když je $\tau > 1$, je výkon záporný. Cyklus pracuje opačným směrem, jako chladicí cyklus, a musíme stroji dodávat práci.



Obr. 11 Graf závislosti poměrného výkonu na teplotě horkého prostoru

Vliv poměru zdvihových objemů na výkon

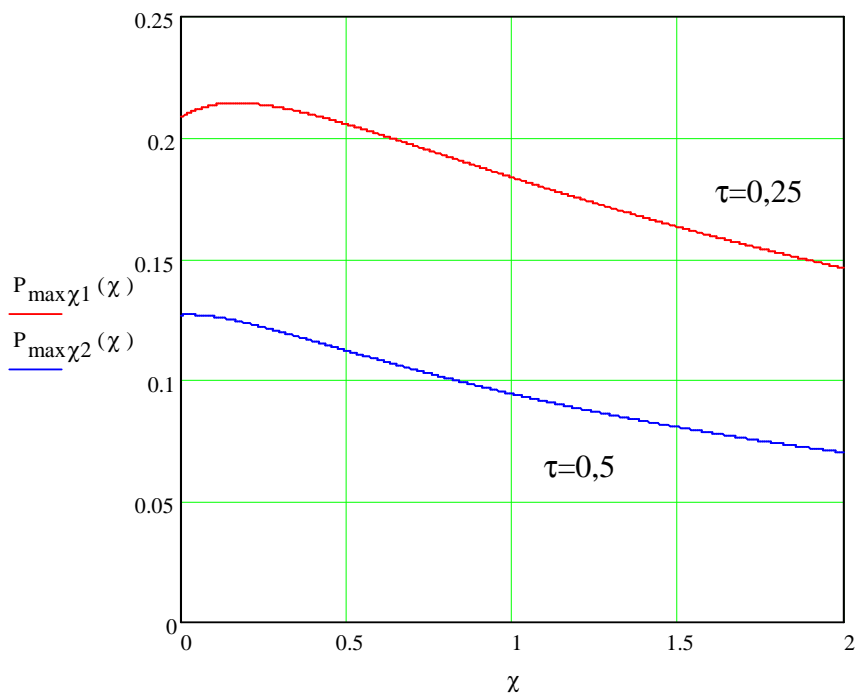
Na obr. 12 je vynesena graf pro dvě různé hodnoty $\tau=0,5$ a $\tau=0,25$. Konstantní je parametr $\phi=90^\circ$ a $\chi=1$. Z grafu je patrné, že hodnota parametru κ , při které je výkon maximální, není stále stejná. Z toho plyne, že není jediná nejideálnější hodnota parametru κ , ale že je vždy potřeba při návrhu přihlídnout k ostatním parametrům.



Obr. 12 Graf závislosti poměrného výkonu na poměru zdvihových objemů

Vliv mrtvého objemu na výkon

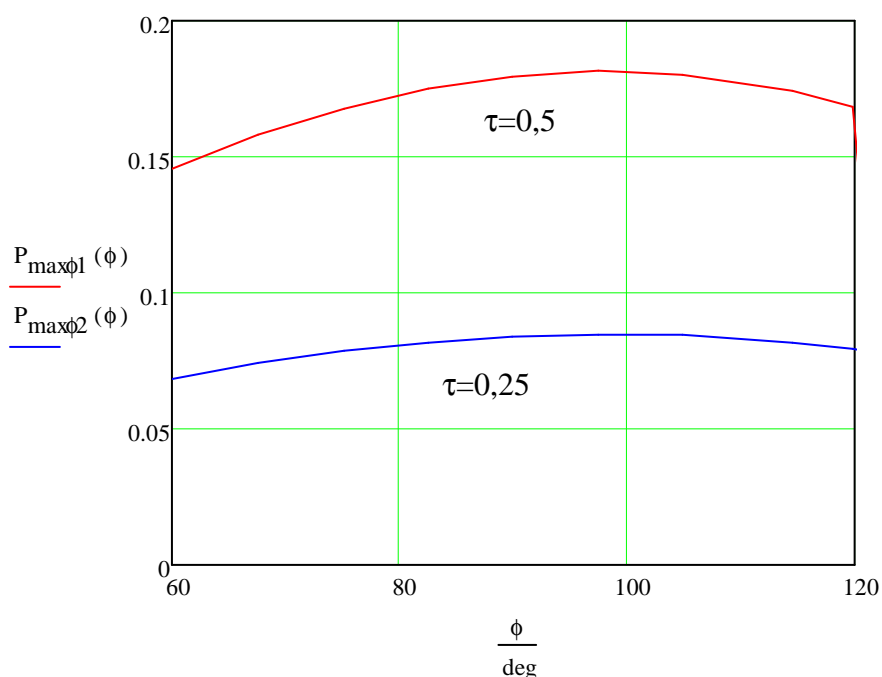
Mrtvý prostor, jak je vidět na obr. 13, má negativní vliv na výkon motoru. Ideální hodnotou poměru χ by byla 0. Této hodnoty bohužel nelze dosáhnout, proto se při návrhu snažíme o minimalizaci mrtvého prostoru a tedy minimalizaci hodnoty χ .



Obr. 13 Graf závislosti poměrného výkonu na poměru mrtvého objemu

Vliv fázového posunu na výkon

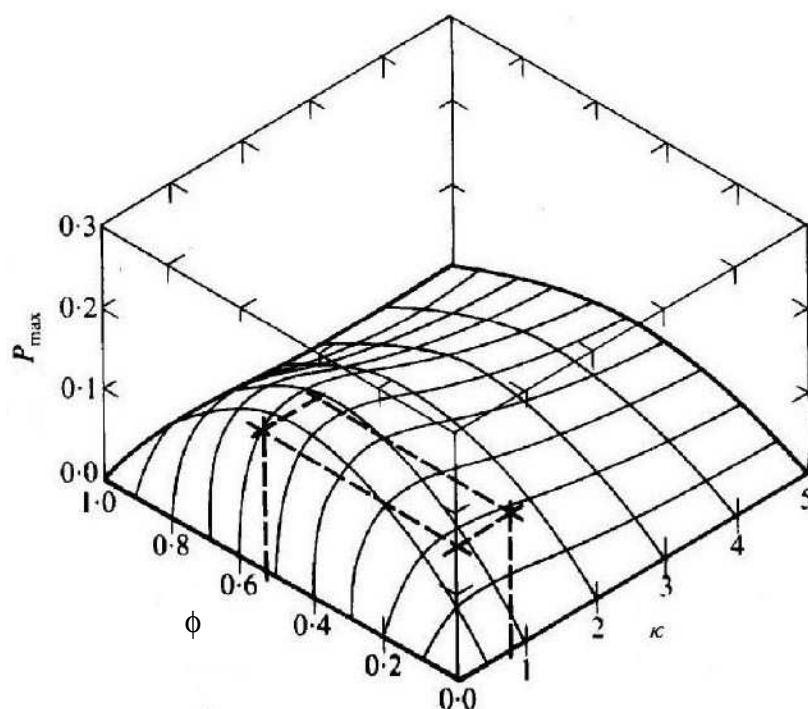
Graf na obr. 14 ukazuje závislost výkonu na fázovém posunutí. Je vidět, že ideální hodnota fázového posunutí se pohybuje někde mezi 90° a 115° . Přesto se při změně fázového posunutí výkon mění jen nepatrně, což nechává flexibilitu motoru při návrhu jeho geometrie.



Obr. 14 Graf závislosti poměrného výkonu na fázovém posunutí

Trojrozměrný graf

Protože charakteristiky pro jedinou proměnnou návrhovou veličinu nejsou příliš transparentní, používá se pro návrh parametrů trojrozměrný graf pro měnící se parametry ϕ a κ a s konstantními parametry τ a χ , které se určí na základě technologických možností výroby. Graf na obr. 15 představuje poměrný výkon motoru s parametry $\tau=0,3$ a $\chi=1$. Z grafu lze odečíst parametry ϕ a κ pro optimální nastavení motoru.



Obr. 15 Trojrozměrný graf [4]

Při návrhu skutečného Stirlingova motoru je třeba mít na paměti, že tento postup je idealizovaný a počítá se zjednodušeními. Proto se skutečný model bude lišit od ideálního a především vypočítaný výkon bude vzdálen od výkonu skutečného motoru. Tento výpočet lze ovšem s úspěchem použít pro představu budoucího návrhu.

5 ZÁVĚR

Stirlingův motor je podle mého názoru velice zajímavým řešením vzhledem k možnosti využití jakékoliv tepelné energie. I když jeho účinnost, při stejných výrobních nákladech, nedosahuje takových hodnot jako například motory s vnitřním spalováním, jeho využití i při nízkých rozdílech teplot a s malými náklady na údržbu mi přijde zajímavé. Co mě na tomto stroji zaujalo nejvíce je, že nemusíme pro chod motoru pouze ohřívat teplou komoru, ale že motor pracuje i při ochlazování studené komory.

V této práci je uveden postup, díky němuž si lze představit předpokládané hodnoty parametrů budoucího návrhu Stirlingova motoru. Určením parametru τ , tedy poměru mezi minimální a maximální teplotou, a na základě odvozených vztahů lze jednoznačně určit ideální parametry pro nejvyšší možný poměrný výkon. Musíme ovšem počítat s tím, že výpočet je idealizovaný a výkon skutečného motoru nebude odpovídat vypočítanému výkonu. Při návrhu skutečného motoru je třeba přistoupit ke komplexnějšímu, složitějšímu výpočtu.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] *Investigation of concepts for high power Stirling engines* [online]. 2000 [cit. 2009-04-02]. Dostupný z WWW: <<http://www-ifkm.mach.uni-karlsruhe.de/Html-e/Project/Stirling/stirling.html>>.
- [2] *Stirling Engine Society - USA* [online]. 1997-2006 [cit. 2009-03-14]. Dostupný z WWW: <<http://www.sesusa.org>>.
- [3] *TEDOM s.r.o. -Stirling engine* [online]. [cit. 2009-03-30]. Dostupný z WWW: <<http://www.stirling.cz>>.
- [4] WALKER, Graham. *Stirling-cycle machines*. [s.l.] :Oxford University Press., 1973. 156 s. ISBN 0-19-896112-1.

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

A	[-]	symbol pro označení výrazu: $(\tau^2 + 2 \cdot \cos(\phi) \cdot \tau \cdot \kappa + \kappa^2)^{1/2}$
B	[-]	symbol pro označení výrazu: $\tau + \kappa + 4 \cdot \chi \cdot \tau / (\tau + 1)$
m	[kg]	hmotnost pracovního média u ideálního cyklu
M _c	[kg]	hmotnost pracovního média v chladném prostoru
M _d	[kg]	hmotnost pracovního média v mrtvém prostoru
M _e	[kg]	hmotnost pracovního média v horkém prostoru
M _m	[kg]	celková hmotnost pracovního média
n	[min ⁻¹]	provozní otáčky motoru
p	[Pa]	tlak pracovního média
p _{1,2,3,4}	[Pa]	tlak média v charakteristických bodech cyklu
p _c	[Pa]	tlak v chladném prostoru
p _d	[Pa]	tlak v mrtvém prostoru
p _e	[Pa]	tlak v horkém prostoru
p _{max}	[Pa]	maximální tlak
p _{mean}	[Pa]	střední hodnota tlaku
p _{min}	[Pa]	minimální tlak
P	[W]	výkon motoru
P _{max}	[-]	poměrný výkonový parametr
q _{max}	[-]	poměrný parametr tepla
Q _c	[J]	celkové teplo dodané do soustavy
Q _{in}	[J]	teplo dodané během izotermické expanze
Q _{out}	[J]	teplo odevzdané během izotermické komprese
Q _{R1}	[J]	teplo přijaté od regenerátoru
Q _{R2}	[J]	teplo odevzdané regenerátoru
R	[J/kg·K]	plynová konstanta
T _{1,2,3,4}	[K]	teplota média v charakteristických bodech cyklu
T _c	[K]	teplota chladného prostoru
T _d	[K]	teplota mrtvého prostoru
T _e	[K]	teplota horkého prostoru
T _{max}	[K]	maximální teplota
T _{min}	[K]	minimální teplota
V _{1,2,3,4}	[m ³]	objem média v charakteristických bodech cyklu
V _C	[m ³]	zdvihový objem chladného prostoru
V _c	[m ³]	objem chladného prostoru v závislosti na natočení kliky
V _D	[m ³]	objem mrtvého prostoru
V _d	[m ³]	objem mrtvého prostoru v závislosti na natočení kliky

V_E	$[m^3]$	zdvihový objem horkého prostoru
V_e	$[m^3]$	objem horkého prostoru v závislosti na natočení kliky
V_{max}	$[m^3]$	maximální objem
V_{min}	$[m^3]$	minimální objem
V_Z	$[m^3]$	zdvihový objem
α	$[rad]$	natočení kliky
δ	$[-]$	symbol pro označení výrazu: A/B
η	$[-]$	tepelná účinnost cyklu
θ	$[rad]$	symbol pro označení výrazu: $\text{atan}(\kappa \cdot \sin(\phi) / (\tau + \kappa \cdot \cos(\phi)))$
κ	$[-]$	poměr zdvihových objemů
τ	$[-]$	teplotní poměr
ϕ	$[rad]$	fázové posunutí
χ	$[-]$	poměr mrtvého prostoru